Doubt Yourself

International Mathematical Olympiad (IMO) 2023
Problema 1

André Pinheiro

Julho de 2023

Problema 1: Determine todos os números inteiros $n > 1$ compostos que satisfazem a seguinte propriedade: se d_1, d_2, ..., d_k são todos os divisores positivos de n com $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$, então d_i divide $d_{i+1} + d_{i+2}$ para todo $1 \leqslant i \leqslant k - 2$.

Proposto por Santiago Rodriguez da Colombia

Proposta de resolução

Primeira coisa que podemos fazer quando encaramos um tipo de problema pedem para determinar um conjunto de valores é **testar com valores de n pequenos.**

n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, ...

Repare que 4, 8, 9 e 16 são potências de expoente superior a 1 ($4=2^2$, $8=2^3$, $9=3^2$, $16=2^4$)

Proposição 1: Todos os $n = p^l$, em que l é um inteiro positivo superior a 1, são soluções para o problema.
Prova: Os divisores de n são potências de p e o resultado segue. $\square$

Agora, temos que provar que estas são as **únicas** soluções para o problema.

Proposta de resolução

Repare que como $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$, temos então que

$d_{k-i} = n/d_{1+i}$, para todo $0 \leq i \leq k - 1$

Por hipótese, temos que

$d_{k-i+1} \mid d_{k-i+2} + d_{k-i+3} \Rightarrow n/d_i \mid n/d_{i-1} + n/d_{i-2} \Rightarrow 1/d_i \mid 1/d_{i-1} + 1/d_{i-2}$

$\Rightarrow 1/d_i \mid (d_{i-1} + d_{i-2})/d_{i-1}d_{i-2} \Rightarrow d_{i-1}d_{i-2} \mid d_i d_{i-1} + d_i d_{i-2}$, para $3 \leq i \leq k$

Suponha que n é composto tal que este possua dois primos distintos na sua fatorização.

Como consequência, existe pelo menos um divisor d_j tal que $d_j \nmid d_{j+1}$

Proposta de resolução

Assim, com o resultado que chegamos anteriormente, temos que:

$d_j d_{j+1} \mid d_j d_{j+2} + d_{j+1} d_{j+2}$, mas como $d_j \mid d_{j+1} + d_{j+2} \Rightarrow d_j \nmid d_{j+2}$, então

$d_j d_{j+1} \nmid d_{j+2} d_{j+1} \Rightarrow d_j d_{j+1} \nmid d_j d_{j+2} \Rightarrow d_{j+1} \nmid d_{j+2}$

Ou seja, concluímos que $d_j \nmid d_{j+1} \Rightarrow d_{j+1} \nmid d_{j+2}$

Ora, repetindo o mesmo processo, vamos obter que

$d_{j+1} \nmid d_{j+2} \Rightarrow d_{j+2} \nmid d_{j+3} \Rightarrow d_{j+3} \nmid d_{j+4} \Rightarrow ... \Rightarrow d_{k-1} \nmid d_k$

Mas isto é uma contradição, pois $d_k = n$ e qualquer divisor divide n.

Logo, as únicas soluções para o problema são dadas por $n = p^l$, em que l é um inteiro positivo superior a 1, tal como queríamos mostrar. □